És important tenir en compte aquesta observació per a calcular, per exemple, les asímptotes horitzontals de la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ per tal de fer la seva gràfica. En calcular el límit, s'ha de distinguir segons $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, ja que els resultats són diferents.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1.$$

Per tant, per a $x \to +\infty$, la funció té com a asímptota horitzontal la recta $y = 1$. Per altra banda,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-4x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$$

Per tant per $x \to -\infty$ la funció té com a asímptota horitzontal la recta $y = -1$. Així, doncs, el fet de calcular amb cura el límit fa veure que aquesta funció té dues asímptotes horitzontals diferents, una quan $x \to +\infty$ i una altra quan $x \to -\infty$.

Problemes

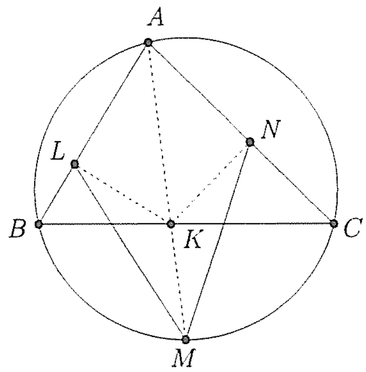
Problemes proposats

A9. Tenim donats al pla un triangle $A_1A_2A_3$ i un punt P_0. Definim $A_s = A_{s-3}$ per tot $s \geq 4$. Construïm una successió de punts $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ de manera que P_k és, per $k = 1, 2, \ldots$, la imatge de P_{k-1} en un gir antihorari de centre A_k i amplitud 120° Demostreu que si $P_{1986} = P_0$, llavors el triangle $A_1A_2A_3$ és equilàter.

A10. Sigui $p_n(k)$ el nombre de permutacions del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tenen exactament k elements fixos. Demostreu que

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!\,.$$

A11. En un triangle acutangle ABC la bisectriu interior de l'angle A talla el costat BC al punt K i el cercle circumscrit al punt M. Des del punt K es tracen perpendiculars KL i KN a AB i AC, respectivament, on posem L i N per a designar els peus de les esmentades perpendiculars. Demostreu que el quadrilàter $ALMN$ i el triangle ABC tenen la mateixa àrea.



A12. Sigui $n \geq 3$ un enter. Demostreu que existeix un conjunt de n punts al pla tal que la distància entre cada parell de punts del conjunt és irracional, i que cada terna de punts del conjunt determina un triangle no degenerat d'àrea racional.

Comentari. A l'enunciat del problema **A7** (vegeu **SCM/Notícies**/1), cal afegir-hi el paràgraf següent: "En les competicions esportives, s'anomena *mitjana de gols fallats* el quocient entre el nombre de gols fallats i el nombre total de llançaments realitzats; en aquest problema la mitjana es dóna *arrodonida* amb tres decimals."

Solucions dels problemes A1-A5

Habitualment donarem solucions dels problemes proposats al número k de **SCM/Notícies** al número $k+2$. Seguint aquesta regla, tot seguit trobareu solucions dels enunciats plantejats a **SCM/Notícies/0**. Afanyeu-vos, si us plau, a enviar solucions dels problemes de **SCM/Notícies/1**.

A1. Demostreu que si a l'equació

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, b i c són enters senars, les arrels són, forçosament, irracionals.

Observació. L'enunciat del problema no és del tot correcte, ja que calia parlar d'*arrels reals* en lloc d'*arrels*.

Solució (FRANCESC BORREL, I.B. Salvador Espriu, Salt). Les arrels seran irracionals si $b^2 - 4ac \in \mathbb{Z}$ no és un quadrat perfecte. Si suposem el contrari, $b^2 - 4ac = x^2$ i com que b^2 és senar, resulta que x^2 és senar i també x. Com que $x - b$ és parell podem posar $x = b + 2s$ (amb $s \in \mathbb{Z}$), i substituint i simplificant, queda $-ac = s(b+s)$. El primer membre d'aquesta igualtat és senar, i per tant també el segon; això implica que s i $b+s$ són senars, però com que b és senar, ha de ser s parell, contradicció.

Altres idees. També es pot resoldre observant que el discriminat $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'equació, ha de ser 5 (mod 8) si a, b, c són senars. Però un quadrat perfecte només pot ser 0, 1 o 4 (mod 8). ∎

A2. Demostreu que si α_1 i α_2 són les arrels de l'equació $x^2 - 6x + 1 = 0$, llavors, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1^n + \alpha_2^n$ és un enter no divisible per 5.

Solució (Redacció). Fent $r_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$, per $n \geq 0$, queda $r_0 = 2$, $r_1 = 6$, $r_2 = 34$. Un simple càlcul mostra que els r_n compleixen la recurrència $r_n = 6r_{n-1} - r_{n-2}$. La mateixa recurrència considerada mòdul 5 dóna $r_0 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 4$ i $r_n = r_{n-1} - r_{n-2}$. Però aquesta darrera relació dóna $r_n = -r_{n-3}$, de manera que la sucessió dels r_i és $r_0, r_1, r_2, -r_0, -r_1, -r_2, r_0, r_1, \ldots$ i cap dels seus termes és 0.

Altres idees. F. BORRELL observa que els r_n són parells i pot fer un raonament semblant mòdul 10.

A. GOMÀ usa "normes". Posa $||a + b\sqrt{2}|| = a^2 - 2b^2$, que és una funció multiplicativa. Com que $\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ i $\alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $||\alpha_1|| = ||\alpha_2|| = 1$. Posant $\alpha_1^n = a + b\sqrt{2}$, queda $\alpha_2^n = a - b\sqrt{2}$ i $||\alpha_1^n|| = ||\alpha_1||^n = 1 = a^2 - 2b^2$. De $\alpha_1^n + \alpha_2^n = 2a$ deduïm que només cal veure que a no pot ser múltiple de 5. Però $a^2 = 1 + 2b^2$ i donant a b valors mòdul 5 es comprova el que volem. ∎

A3. Demostreu que, per a tot primer $p > 2$, el numerador m de la fracció

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

és divisible per p (Teorema de Wolstenholme).

Solució (F. BORRELL) Com que $(p-1)!$ no és divisible per p ja que aquest és primer, només caldrà veure que el numerador de la fracció, és a dir,

$$\hat{1}\,2\cdots(p-1) + 1\,\hat{2}\cdots(p-1) + 1\,2\cdots\widehat{(p-1)}$$

és múltiple de p. És fàcil de comprovar que els $p-1$ sumands de l'expressió són tots diferents mòdul p i, per tant, són exactament $1, 2, \ldots, p-1$ mòdul p. La seva suma és $p \cdot \frac{p-1}{2}$ que és 0 mòdul p.

Altres idees. LLUÍS BIBILONI (UAB) dóna una solució semblant, observant que la congruència de Wilson diu que els sumands esmentats són precisament $-1^{-1}, -2^{-1}, \ldots, -(p-1)^{-1}$, tots ells diferents mòdul p.

El problema admet un refinament ja que es pot demostrar que si $p > 3$, el numerador és múltiple de p^2. ∎

A4. Tenim $n > 1$ llums disposats en forma circular $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$. Un llum pot estar encès o apagat. A partir de L_0 es fa una successió d'accions S_j de la següent forma:

i) L'acció S_j afecta només el llum L_j (l'estat dels altres no canvia).

ii) Si L_{j-1} és encès, S_j canvia l'estat de L_j.

iii) Si L_{j-1} és apagat, S_j no canvia l'estat de L_j.

Els llums estan indexats mòdul n. Inicialment els llums estan encesos. Demostreu:

a) Existeix un enter positiu $M(n)$ tal que després de $M(n)$ passos tots els llums tornen a estar encesos.

b) Si $n = 2^k$, llavors $M(n) = n^2 - 1$.

c) Si $n = 2^k + 1$, llavors $M(n) = n^2 - n - 1$.

Solució (oficial de la 34th IMO, Istanbul). Designem per $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ el vector amb components 0 o 1 que indica l'estat dels llums $L_0, \ldots, L_{n-1}$. L'acció S_0 és, en aritmètica binària, $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \to (v_{n-1} + v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$; l'acció S_1 és $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \to (v_0, v_0 + v_1, \ldots, v_{n-1})$; i així successivament. Si indiquem per R la transformació "rotació a l'esquerra" que fa $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \to (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_0)$, resulta $S_1 = R^{-1} S_0 R$, i també, per inducció, $S_i = R^{-i} S_0 R^i$. El producte d'accions successives S_i és

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= S_{k-1} S_{k-2} \cdots S_1 S_0 = \\ &= R^{-k}(RS_0)^k = R^{-k} T^k \end{aligned}$$

si fem $T = RS_0$.

a) Hem de veure que el vector $\vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ es transforma en ell mateix per una certa P_s; però com que $R(\vec{1}) = \vec{1}$, és necessari i suficient veure que $T^s(\vec{1}) = (\vec{1})$ per un cert s. De fet, és suficient veure que una certa potència de T és la identitat. De matrius $n \times n$ binàries n'hi ha un nombre finit (2^{n^2}); les sucessives potències T^i arribaran a repetir-se i tindrem $T^r = T^s$ per uns certs $r < s$. Com que T és una transformació invertible, traient factor comú T^r resulta $T^{s-r} = I$ i la part a) queda demostrada.

b) La matriu de T és

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i els seu polinomi característic, desenvolupant per la darrera columna resulta $x^n - x^{n-1} - 1$; pel teorema de Hamilton-Cayley la matriu T compleix

$$T^n - T^{n-1} - I = 0.$$

Recordant que a $\mathbb{Z}_2$ elevar al quadrat o a una potència de 2 una suma equival a elevar els sumands separadament i sumar, i calculant successivament, surt $T^{n^2} = (T^{n-1} + I)^n = T^{n(n-1)} + I$ ja que n és potència de 2. Traient factor comú T^{n^2-n} resulta $T^{n^2-n}(T^n - I) = I$, d'on, $T^{n^2-n}T^{n-1} = T^{n^2-1} = I$.

c) Es demostra igual que el cas b), modificant els càlculs convenientment. $T^{n^2-n} = T^{n(n-1)} = (T^{n-1} + I)^{n-1} = T^{(n^2-2n+1)} + I$ ja que $n - 1$ és potència de 2. Traient factor comú T^{n^2-2n+1} resulta $T^{n^2-2n+1}(T^{n-1} + I) = I$ d'on $T^{n^2-2n+1}T^n = T^{n^2-n+1} = I$.

Observacions. Aquesta solució, que pot canviar-se fàcilment a una altra sense recurs de transformacions lineals, operant directament a l'anell $\mathbb{Z}_2[X]/(X^n - X^{n-1} - 1)$, és relativament senzilla d'entendre si es poden usar, de forma coneguda i automàtica, les tècniques habituals de l'àlgebra lineal o dels anells de polinomis. Hi ha d'altres solucions que resulten de comptar directament sobre els estats dels llums, que requereixen menys tècnica, però que resulten molt més difícils d'intuir i d'escriure rigorosament. En un proper **SCM/Notícies**, donarem la solució apareguda a la revista *Mathematical Mayhem* i també una altra de semblant que ens ha fet arribar F. BORRELL. ∎

A5. A cada casella d'un escaquer $n \times n$ hi ha un llum. En ser tocat un llum, aquest llum i tots els situats a la seva fila i columna canvien d'estat (passen d'apagat a encès i recíprocament). Inicialment són tots apagats. Demostreu que sempre és possible, amb una successió escaient de tocs, que tot l'escaquer quedi encès, i calculeu, en funció de n, el nombre mínim de tocs per tal que s'encenguin tots els llums.

Solució (Redacció, amb idees de F. BORRELL). Si toquem una vegada cada casella de l'escaquer, cada llum canviarà $2n - 1$ vegades, i com que aquest valor és senar, quedaran tots els llums encesos. Amb n^2 tocs segur que tenim una solució que encén tots els llums.

Si es fan menys de n tocs, hi haurà algun element en una fila i columna que no quedarà tocat, i per tant el llum corresponent no s'encendrà. En conclusió, el nombre de tocs ℓ ha de ser més gran o igual que n, i per tant el nombre total de tocs ℓ ha d'estar entre n i n^2.

Si n és senar i es fan n tocs resseguint una fila o columna, tots els llums de les altres files i columnes s'encendran, i els de la fila i columna resseguides rebran un nombre senar de tocs i quedaran encesos. En conclusió, si n és senar, el mínim nombre de tocs és n.

Si n és parell cal demostrar que el mínim nombre de tocs necessaris és n^2. Observem: a) Tocar dues caselles diferents produeix un efecte sobre els llums que és independent de l'ordre en què s'han tocat. b) Tocar dues vegades la mateixa casella no produeix cap efecte. En conclusió, d'una sèrie de tocs es poden treure els tocs repetits i es pot canviar l'ordre dels tocs.

Considerem la matriu $n \times n$ que té entrades a_{ij} iguals a 1 o 0 segons que s'hagi fet un toc a la casella i, j. Siguin f_i, c_j les sumes de les files i i columna j. Resulta evident que el nombre total de tocs és $\ell = \sum_1^n f_i = \sum_1^n c_j$. D'altra banda, el nombre de tocs que afecten la casella i, j, que ha de ser senar, és $f_i + c_j - a_{ij} = 2r + 1$. Sumant aquesta expressió per totes les i queda $\sum_1^n f_i + nc_j - \sum_i a_{ij} = 2s + n$, o bé $\sum_1^n f_i + (n-1)c_j = 2s + n$. En aquesta expressió, si $\sum f_i$ fos senar, hauria de ser c_j senar; però llavors el mateix raonament seria vàlid per a tots els c_j i, essent tots senars, la suma $\sum c_j$ seria parell ja que té un nombre parell n de sumands. Això és absurd ja que aquesta suma és precisament $\sum f_i$, senar per hipòtesi. Per tant han de ser $\sum f_i$ i c_j parells. Aplicant el mateix raonament a tots els f_i i els c_j resulten tots parells. De la igualtat $f_i + c_j - a_{ij} = 2r + 1$ resulta que a_{ij} és senar i per tant és 1, per a tot i, j. Calen, doncs, n^2 tocs per a encendre tots els llums. ∎